کد فرم : **FR/FY/11**
ویرایش : صفر

**(فرم طرح سئوالات امتحانات پایان ترم )**
**دانشکده ریاضی**

گروه آموزشی : **ریاضی** امتحان درس : **ریاضی۲ –فنی (۱۳ گروه هماهنگ)** نیمسال (اول/ **دوم** ) **۹۴-۱۳۹۳** نام مدرس :
نام و نام خانوادگی : شماره دانشجویی : تاریخ : **۱۳۹۴/۳/۳۰** وقت : **۱۳۵** دقیقه

**توجه :**
**از نوشتن با مداد خودداری نمایید.**
**استفاده از هرگونه ماشین حساب ممنوع است.**
**در طول برگزاری امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.**

---

**سوال۱-** انتگرال دوگانه $\int_{1}^{e}\int_{1/e}^{1/y}\cos(x-\ln x)\,dxdy$ را محاسبه کنید. **۲۰ نمره**

---

**سوال۲-** اگر ناحیه انتگرالگیری انتگرال سه گانه $I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{y^2+z^2}^{1} f(x,y,z)\,dxdzdy$ را $V$ بنامیم ، کران انتگرالهای $I_2=\iiint_V f(x,y,z)\,dydxdz$ و $I_1=\iiint_V f(x,y,z)\,dzdydx$ را بنویسید. **۱۵ نمره**

---

**سوال۳-** حجم قسمتی از کره $x^2+y^2+z^2=4$ را بیابید که درون استوانه $x^2+y^2=2x$ قرار دارد. **۱۵ نمره**

---

**سوال۴-** انتگرال منحنی‌الخط زیر را حل کنید که در آن مسیر $C$ قسمتی از منحنی $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ y^2+z^2=2\end{cases}$ است که نقطه $A=(0,-1,1)$ را به $B=(0,1,1)$ وصل می‌کند. **۱۵ نمره**

$$I=\int_C (x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$$

---

**سوال۵-** به کمک قضیه گرین ، انتگرال زیر را حل کنید که در آن $C$ مرز ناحیه محدود به منحنی‌های $xy=1$ ، $xy=3$ ، $x^2-y^2=9$ و $x^2-y^2=16$ واقع در ربع اول دستگاه مختصات است : **۲۰ نمره**

$$I=\int_C (e^y-y^3)dx+(x^3+xe^y)dy$$

---

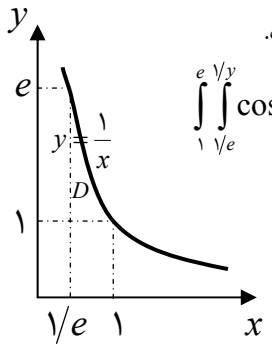
**سوال۶-** انتگرال رویه ای $\iint_S (xy+yz)dS$ را حل کنید که در آن $S$ قسمتی از رویه $z=\sqrt{x^2+y^2}$ است که درون استوانه $x^2+y^2=2x$ واقع است. **۲۰ نمره**

---

**سوال۷-** $S$ سطح خارجی نیمکره $x^2+y^2+z^2=a^2\ ,a>0\ ,\ z\geq 0$ و $\vec{n}$ بردار یکه قائم بر $S$ است. اگر $\vec{F}=x^3\,\vec{i}+y^2\,\vec{j}+(x^3+y^4)^3e^{xy}\cos y\,\vec{k}$ ، مقدار انتگرال $\iint_S curl\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ را بیابید. **۲۰ نمره**

---

**موفق باشید**




**جواب سوال۱-** باید ترتیب انتگرالگیری را عوض کنیم. ناحیه انتگرالگیری ، $D$ ، در شکل نشان داده شده است.

$$\int_{1}^{e}\int_{1/e}^{1/y}\cos(x-\ln x)dxdy=\int_{1/e}^{1}\int_{1}^{1/x}\cos(x-\ln x)dydx$$

$$=\int_{1/e}^{1}(\frac{1}{x}-1)\cos(x-\ln x)dx=-\sin(x-\ln x)\,|_{1/e}^{1}=-\sin 1+\sin(\frac{1}{e}+1)$$

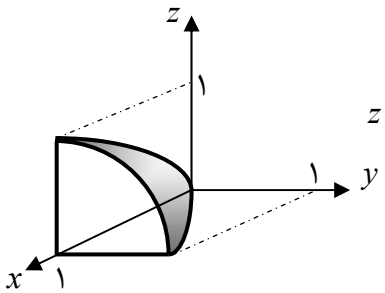
**جواب سوال۲-** با توجه به کرانهای انتگرال سه گانه $I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{y^2+z^2}^{1}f(x,y,z)dxdzdy$

ناحیه انتگرالگیری ، ناحیه محدود به سهمیگون $x=y^2+z^2$ و صفحات $z=0$ ، $y=0$ و $x=1$ است. بنابر این $0\le x,y,z\le 1$

و در نتیجه کران انتگرال خارجی مشخص است : $I_2=\int_{z=0}^{1}\int_{x=?}^{?}\int_{y=?}^{?}f(x,y,z)dydxdz$ و $I_1=\int_{x=0}^{1}\int_{y=?}^{?}\int_{z=?}^{?}f(x,y,z)dzdydx$

در $I_1$ تصویر ناحیه روی صفحه $xy$ ناحیه ای است محدود به سهمی $x=y^2$ و خطوط $x=1$ و $y=0$

بنابر این : $I_1=\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{\sqrt{x}}\int_{z=?}^{?}f(x,y,z)dzdydx$




در $I_2$ تصویر ناحیه روی صفحه $xz$ ناحیه ای است محدود به سهمی $x=z^2$ و خطوط $x=1$ و $z=0$

بنابر این : $I_2=\int_{z=0}^{1}\int_{x=z^2}^{1}\int_{y=?}^{?}f(x,y,z)dydxdz$

در هر دو انتگرال کران انتگرال داخلی را یکی از صفحات مختصات و سطح سهمیگون تعیین می کنند.

بنابر این : $I_1=\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{x}}\int_{0}^{\sqrt{x-y^2}}f(x,y,z)dzdydx$ ، $I_2=\int_{0}^{1}\int_{z^2}^{1}\int_{0}^{\sqrt{x-z^2}}f(x,y,z)dydxdz$

**جواب سوال۳-** مساله ، حجم قسمتی از کره را می خواهد که درون استوانه قرار دارد. بنابر این تصویر ناحیه مورد نظر روی صفحه $xy$ ، درون دایره $x^2+y^2=2x$ است که در مختصات استوانه ای به صورت $r=2\cos\theta$ نوشته می‌شود.

معادله کره در دستگاه مختصات استوانه ای عبارت است از : $r^2+z^2=4$

حجم را به کمک انتگرال سه گانه و در دستگاه مختصات استوانه ای محاسبه می‌کنیم.

$$V=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{r=0}^{2\cos\theta}\int_{z=-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}}rdzdrd\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{r=0}^{2\cos\theta}2r\sqrt{4-r^2}\,drd\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{-2}{3}(\sqrt{4-r^2})^3\,|_{0}^{2\cos\theta}\,d\theta$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{-2}{3}(8|\sin\theta|^3-8)d\theta=\frac{8}{3}\int_{0}^{\pi/2}(4-4\sin^3\theta)d\theta=\frac{8}{3}\int_{0}^{\pi/2}(4-3\sin\theta+\sin 3\theta)d\theta$$

$$=\frac{8}{3}[4\theta+3\cos\theta-\frac{1}{3}\cos 3\theta]_{0}^{\pi/2}=\frac{8}{3}(2\pi-3+\frac{1}{3})=\frac{16}{3}\pi-\frac{64}{9}$$

**جواب سوال۴-** تابع برداری $F(x,y,z)=(x^2-2yz\ ,\ y^2-2xz\ ,z^2-2xy)$ را در نظر می گیریم.

چون $curlF=(-2x+2x,-2y+2y,-2z+2z)=(0,0,0)$

پس انتگرال داده شده مستقل از مسیر است و $F$ یک تابع گرادیان است.

روش اول : $F=grad\ f\quad ,\quad f(x,y,z)=\frac{x^3}{3}+\frac{y^3}{3}+\frac{z^3}{3}-2xyz$

$$\int_C (x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz=f(B)-f(A)=\frac{2}{3}-\frac{0}{3}=\frac{2}{3}$$

روش دوم : اگر به جای مسیر داده شده پاره خط واصل $A$ و $B$ را قرار دهیم داریم

$$C':\ \ x=0\ ,\ y=2t-1\ ,\ z=1\ ,\ \ t\in[0,1]$$

$$I=\int_{C'}(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz=\int_{t=0}^{1}(2t-1)^2(2dt)=\frac{1}{3}(2t-1)^3\,|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

و یا بطور ساده‌تر می‌توانیم بنویسیم : $C':\ \ x=0\ ,-1\le y\le 1\ ,\ z=1$

$$I=\int_{C'}(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz=\int_{y=-1}^{1}y^2dy=\frac{1}{3}y^3\,|_{-1}^{1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

**جواب سوال۵-** ناحیه را $D$ می نامیم طبق قضیه گرین داریم

$$I=\int_C(e^y-y^3)dx+(x^3+xe^y)dy=\iint_D[\frac{\partial}{\partial x}(x^3+xe^y)-\frac{\partial}{\partial y}(e^y-y^3)]dxdy=\iint_D 3(x^2+y^2)dxdy$$

برای حل انتگرال دوگانه از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم :

$$u=x^2-y^2\ \ ,\ \ v=xy\ ,\ dudv=\begin{vmatrix}2x & -2y\\ y & x\end{vmatrix}dxdy=2(x^2+y^2)dxdy\rightarrow(x^2+y^2)dxdy=\frac{dudv}{2}$$

$$I=\iint_D 3(x^2+y^2)dxdy=\iint_D\frac{3dudv}{2}=\frac{3}{2}\iint_D dudv=\frac{3}{2}\int_1^3\int_9^{16}dudv=\frac{3}{2}\int_1^3 7dv=21$$

**جواب سوال۶-** تصویر سطح $S$ روی صفحه $z=0$ درون دایره $x^2+y^2=2x$ است که در دستگاه مختصات قطبی به صورت $r=2\cos\theta$ نوشته می‌شود.

بردار قائم بر سطح برابر است با $\vec{n}=\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1)$ بنابر این $dS=\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}rdrd\theta$ و در نتیجه :

$$\iint_S(xy+yz)dS=\iint_{x^2+y^2\le 2x}(xy+y\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{2}dxdy$$

انتگرال دوگانه را در دستگاه مختصات قطبی حل می‌کنیم.

$$\iint_S(xy+yz)dS=\sqrt{2}\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\int_{r=0}^{2\cos\theta}(r^2\cos\theta\sin\theta+r^2\sin\theta)rdrd\theta$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{r=0}^{2\cos\theta}\sin\theta(\cos\theta+1)r^3drd\theta=\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin\theta(\cos\theta+1)\frac{r^4}{4}\,|_0^{2\cos\theta}\,d\theta$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}4\sin\theta(\cos^5\theta+\cos^4\theta)d\theta=4\sqrt{2}[\frac{-1}{6}\cos^6\theta-\frac{1}{5}\cos^5\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2}=0$$

**جواب سوال۷**- با توجه به تابع برداری $F$ به نظر می‌آید که حل مستقیم انتگرال روی سطح کار ساده ای نیست.
بنابر این برای حل این انتگرال باید از قضیه استوکس و یا قضیه واگرایی استفاده کنیم.
روش اول ( قضیه استوکس) : مرز سطح $S$ یعنی دایره $x^۲+y^۲=a^۲\,,\ z=۰$ را $C$ می‌نامیم.
طبق قضیه استوکس $\iint_S curl\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ و چون روی $C$ داریم $dz=۰$ بنابر این

$$\iint_S curl\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C (x^۳dx+y^۲dy)=\int_{\theta=۰}^{۲\pi}((a\cos\theta)^۳(-a\sin\theta)d\theta+(a\sin\theta)^۲(a\cos\theta)d\theta)$$

$$=\int_{\theta=۰}^{۲\pi}(-a^۴\cos^۳\theta\sin\theta)+a^۳\sin^۲\theta\cos\theta)d\theta=[\frac{a^۴}{۴}\cos^۴\theta+\frac{a^۳}{۳}\sin^۳\theta]_۰^{۲\pi}=۰$$

روش دوم ( قضیه واگرایی) : سطح $S$ بسته نیست. سطح دایره‌ای $x^۲+y^۲\le a^۲\,,\ z=۰$ را $S'$ می‌نامیم.
$S\bigcup S'$ یک سطح بسته است حجم محدود به آن را $V$ می‌نامیم .
شرایط قضیه واگرایی برقرار است بنابر این $\iint_{S\bigcup S'} curl\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_V div(curl\vec{F})dV=\iiint_V ۰\times dV=۰$
از طرف دیگر $\iint_{S\bigcup S'} curl\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_S curl\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS+\iint_{S'} curl\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ یعنی $\iint_S curl\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=-\iint_{S'} curl\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$

$$\iint_{S'} curl\vec{F}\cdot(۰,۰,-۱)\,dxdy=\iint_{S'}(a,b,۰)\cdot(۰,۰,-۱)\,dxdy=\iint_{S'}۰\,dxdy=۰$$

و در نتیجه : $\iint_S curl\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=۰$

۱۳۹۴/۳/۳۰